FACTORIZATION OF REAL SYMPLECTIC MATRICES OF ORDER FOUR INTO TWO ELLIPTIC MATRICES

Phan Hoang Nam[1]

[1]*Faculty of Fundamental Science 2, Posts and Telecommunications Institute of Technology, Ho Chi Minh City, Vietnam*
Email address:: namph1@ptit.edu.vn
**Corresponding author: Phan Hoang Nam*
https://doi.org/10.51453/3093-3706/2026/1513

ARTICLE INFO

Received: 15/6/2026
Revised: 20/7/2026
Published: 28/8/2026

KEYWORDS

Real symplectic matrix;
Elliptic matrix;
Matrix factorization;
Canonical form;
Symplectic group.

ABSTRACT

A real symplectic matrix is called elliptic if it is diagonalizable over C and all its eigenvalues lie on the unit circle. We prove that every element of Sp_4(R) can be expressed as a product of two real elliptic symplectic matrices and that the upper bound 2 is optimal. The proof relies on the classification of real symplectic canonical forms of order four due to Awa and de la Cruz. Canonical forms that decompose into blocks of order two are handled by using the corresponding result for Sp_2(R), whereas the indecomposable forms are treated by means of symplectic complex structures and a spectral criterion for reciprocal quartic characteristic polynomials.

PHÂN TÍCH MA TRẬN SYMPLECTIC THỰC CẤP BỐN THÀNH TÍCH CỦA HAI MA TRẬN ELLIPTIC

Phan Hoàng Nam[1]

[1]*Khoa Cơ bản 2, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, TP. Hồ Chí Minh, Việt Nam*

Địa chỉ email: namph1@ptit.edu.vn

Tác giả liên hệ: Phan Hoàng Nam

https://doi.org/10.51453/3093-3706/2026/1513

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài: 15/6/2026
Ngày hoàn thiện: 20/7/2026
Ngày đăng: 28/8/2026

TÓM TẮT

Một ma trận symplectic thực được gọi là elliptic nếu nó chéo hóa được trên C và mọi trị riêng đều nằm trên đường tròn đơn vị. Chúng tôi chứng minh rằng mọi phần tử của Sp_4(R) là tích của hai ma trận symplectic thực elliptic và cận trên 2 là tối ưu. Chứng

TỪ KHÓA

Ma trận đối ngẫu thực;
Ma trận elliptic;
Phân tích ma trận;
Dạng chuẩn;
Nhóm symplectic.

minh dựa trên phân loại dạng chuẩn symplectic thực cấp bốn của Awa và de la Cruz. Các dạng chuẩn phân rã thành các khối cấp hai được xử lý bằng kết quả tương ứng trong Sp_2(R); các dạng không phân rã được xử lý bằng cấu trúc phức symplectic và một tiêu chuẩn phổ cho đa thức đặc trưng đối xứng bậc bốn.

1. INTRODUCTION (GIỚI THIỆU)

Việc mô tả các lớp liên hợp và phân tích các phần tử của những nhóm cổ điển thành tích của các ma trận thuộc những lớp có cấu trúc đặc biệt là một chủ đề đã được nghiên cứu từ lâu. Công trình của Wall (1963) về các lớp liên hợp trong các nhóm unitary, symplectic (còn gọi là đối ngẫu) và trực giao cung cấp một nền tảng quan trọng cho việc nghiên cứu các dạng chuẩn trong các nhóm cổ điển. Wonenburger (1966) đã thiết lập một kết quả cổ điển về việc biểu diễn các phép biến đổi tuyến tính thành tích của các đối hợp. Trong nhóm symplectic, de la Cruz (2015) chứng minh rằng mọi ma trận symplectic phức là tích của bốn đối hợp symplectic. Đối với trường thực, Awa và de la Cruz (2020) chứng minh rằng mọi phần tử của $\mathsf{Sp}_4(\mathbb{R})$ là tích của bốn đối hợp symplectic thực. Ellers và Villa (2020) nghiên cứu việc sinh nhóm symplectic bởi các đối hợp trên những trường mà -1 là một bình phương; gần đây, de Seguins Pazzis (2024a) mở rộng hướng nghiên cứu này cho các trường vô hạn có đặc số khác 2 và thu được các cận toàn cục bằng bốn hoặc năm đối hợp, tùy theo số chiều.

Bên cạnh lớp đối hợp, nhiều lớp nhân tử có cấu trúc khác cũng đã được khảo sát. De la Cruz và Granario (2018) nghiên cứu các tích của ma trận symplectic chuẩn tắc và thu được các phân tích liên quan đến các lớp ma trận symplectic unitary, Hermitian và skew-Hermitian. Granario và Tam (2021) chứng minh rằng mọi ma trận symplectic là tích của năm ma trận symplectic xác định dương và cận năm là tối ưu. Gần với bài toán hiện tại hơn, Joven và Paras (2023) chứng minh rằng mọi ma trận symplectic thực là tích của sáu đối hợp lệch symplectic, tức các ma trận S thỏa $S^2 = -I$. De Seguins Pazzis (2024b) cũng đặc trưng các tích của hai phần tử lũy đơn có chỉ số 2 trong nhóm symplectic và suy ra rằng mọi phần tử là tích của ba phần tử như vậy, với cận ba là tối ưu trong trường hợp tổng quát.

Trong bài báo này, chúng tôi xét một lớp nhân tử được xác định bởi tính chất phổ. Với n là số nguyên dương, đặt $J_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ và $\mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} : A^T J_{2n} A = J_{2n}\}$. Ký hiệu $\sigma(A)$ là phổ của A.

Email: sjttu@tqu.edu.vn

Định nghĩa 1.1. Một ma trận $E \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ được gọi là **elliptic** nếu E chéo hóa được trên $\mathbb{C}$ và $|\lambda| = 1$ với mọi $\lambda \in \sigma(E)$.

Ký hiệu $\mathcal{E}_{2n}$ là tập các ma trận elliptic trong $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Với $A \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, đặt $\ell_{\mathrm{ell}}(A) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : A = E_1 \cdots E_k, E_j \in \mathcal{E}_{2n}\}$ nếu biểu diễn như vậy tồn tại; ở đây $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$ và tích rỗng được hiểu là ma trận đơn vị. Nếu không có biểu diễn như vậy thì đặt $\ell_{\mathrm{ell}}(A) = \infty$. Ta gọi $\ell_{\mathrm{ell}}(A)$ là **độ dài elliptic** của A và đặt $\ell_{\mathrm{ell}}\left(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})\right) = \sup_{A \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})} \ell_{\mathrm{ell}}(A)$.

Ma trận đơn vị I_{2n} là elliptic. Vì vậy, nếu A là tích của r ma trận elliptic thì, với mọi $k \geq r$, ta có thể chèn thêm các nhân tử I_{2n} để biểu diễn A thành tích của đúng k ma trận elliptic. Đặc biệt:

- $\ell_{\mathrm{ell}}(A) = 0 \Leftrightarrow A = I_{2n}$
- $\ell_{\mathrm{ell}}(A) = 1 \Leftrightarrow A \neq I_{2n}$ và A elliptic.

Trong định nghĩa trên, tính chéo hóa được xét trên $\mathbb{C}$; tuy nhiên, các nhân tử elliptic trong bài vẫn là các ma trận thực thuộc $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Mọi đối hợp lệch symplectic đều elliptic, nhưng lớp elliptic rộng hơn đáng kể. Lớp này không đóng đối với phép nhân; ngay trong $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$, tích của hai phần tử elliptic có thể có phổ nằm ngoài đường tròn đơn vị. Vì vậy, việc xác định số nhân tử elliptic cần thiết để biểu diễn một phần tử tùy ý của $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ là một bài toán không hiển nhiên. Kết quả dưới đây cho thấy trong cấp bốn chỉ cần hai nhân tử và cận trên này là tối ưu.

Định lý 1.2 (Kết quả chính). *Mọi ma trận $A \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ là tích của hai ma trận elliptic. Hơn nữa, $\ell_{\mathrm{ell}}\left(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})\right) = 2$.*

Chứng minh dựa trên phân loại dạng chuẩn symplectic thực cấp bốn của Awa và de la Cruz. Trước hết, chúng tôi xử lý trường hợp $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ và thiết lập một bổ đề cho phép ghép hai phân tích thông qua tổng mở rộng. Hai họ dạng chuẩn P_1 và P_3 được xử lý bằng các cấu trúc phức symplectic $\mathcal{J}(C)$ thỏa $\mathcal{J}(C)^2 = -I$, còn P_2 và P_4 được xử lý bằng cách đưa đa thức đặc trưng đối xứng bậc bốn về một phương trình bậc hai theo biến $y = x + x^{-1}$.

2. METHODS (PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU)

Bài báo này kết hợp các kỹ thuật tính toán và phân tích về ma trận. Dưới đây là một số định nghĩa, và tính chất cần thiết cho chứng minh kết quả chính.

Hai ma trận $A, B \in \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ được gọi là **đồng dạng symplectic thực** nếu tồn tại $S \in \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ sao cho $B = SAS^{-1}$.

Bổ đề 2.1 (Bất biến qua đồng dạng symplectic). *Nếu $A, B \in \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ đồng dạng symplectic thực thì $\ell_{\mathsf{ell}}(A) = \ell_{\mathsf{ell}}(B)$.*

Chứng minh. Giả sử $B = SAS^{-1}$ với $S \in \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Nếu $A = E_1 \cdots E_k$ với E_j elliptic thì $B = (SE_1S^{-1}) \cdots (SE_kS^{-1})$. Đồng dạng thực bảo toàn phổ và tính chéo hóa trên $\mathbb{C}$, nên mỗi SE_jS^{-1} vẫn elliptic. Suy ra $\ell_{\mathsf{ell}}(B) \le \ell_{\mathsf{ell}}(A)$. Đổi vai trò của A và B, ta thu được bất đẳng thức ngược lại. □

Cho $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ và $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \in \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Ta định nghĩa *tổng mở rộng* của A và B bởi $A \boxplus B = \begin{bmatrix} A_{11} \oplus B_{11} & A_{12} \oplus B_{12} \\ A_{21} \oplus B_{21} & A_{22} \oplus B_{22} \end{bmatrix}$. Nếu $C \in \mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ và $D \in \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ thì $(A \boxplus B)(C \boxplus D) = AC \boxplus BD$. Hơn nữa, $A \boxplus B \in \mathsf{Sp}_{2(m+n)}(\mathbb{R})$ và $A \boxplus B$ đồng dạng với $A \oplus B$ qua một ma trận hoán vị [8].

Bổ đề 2.2 (Ghép hai phân tích). *Nếu $A = E_1 \cdots E_k \in \mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ và $B = F_1 \cdots F_k \in \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, trong đó mọi E_j, F_j đều elliptic, thì $A \boxplus B = \prod_{j=1}^{k} (E_j \boxplus F_j)$ là tích của k ma trận elliptic.*

Chứng minh. Công thức phân tích suy ra từ tính chất nhân của $\boxplus$. Với mỗi j, ma trận $E_j \boxplus F_j$ đồng dạng với $E_j \oplus F_j$. Tổng trực tiếp này chéo hóa được trên $\mathbb{C}$ và có phổ $\sigma(E_j) \cup \sigma(F_j)$, nên mọi trị riêng đều có môđun bằng 1. Do đó $E_j \boxplus F_j$ là elliptic. □

Hệ quả 2.3 (Độ dài của tổng mở rộng). *Cho n, m là các số nguyên dương, $A \in \mathsf{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ và $B \in \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Nếu $\ell_{\mathsf{ell}}(A), \ell_{\mathsf{ell}}(B) < \infty$ thì*

$\ell_{\mathsf{ell}}(A \boxplus B) \le \max\{\ell_{\mathsf{ell}}(A), \ell_{\mathsf{ell}}(B)\}$

Chứng minh. Đặt $k = \max\{\ell_{\mathsf{ell}}(A), \ell_{\mathsf{ell}}(B)\}$. Nếu $k = 0$ thì $A = I_{2m}$ và $B = I_{2n}$, nên kết luận là hiển nhiên. Giả sử $k \ge 1$. Bằng cách chèn thêm các nhân tử đơn vị vào phân tích ngắn hơn, ta viết được $A = E_1 \cdots E_k$ và $B = F_1 \cdots F_k$, trong đó mọi E_j, F_j đều elliptic. Áp dụng Bổ đề 2.2, ta suy ra $A \boxplus B$ là tích của k ma trận elliptic. Do đó $\ell_{\mathsf{ell}}(A \boxplus B) \le k$. □

Với $C \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ đối xứng, đặt $\mathcal{J}(C) = \begin{bmatrix} 0 & C \\ -C^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

Email: sjttu@tqu.edu.vn

Bổ đề 2.4 (Cấu trúc phức symplectic). *Nếu* $C \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ *đối xứng thì* $\mathcal{J}(C) \in \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{J}(C)^2 = -I_{2n}$ *và do đó* $\mathcal{J}(C)$ *là elliptic. Hơn nữa, nếu* $C, D \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ *đều đối xứng và* $M = -CD^{-1}$, *thì* $M \oplus M^{-T} = \mathcal{J}(C)\mathcal{J}(D)$.

Chứng minh. Do $C^T = C$ và $(C^{-1})^T = C^{-1}$, tính trực tiếp ta được $\mathcal{J}(C)^T J_{2n} \mathcal{J}(C) = J_{2n}$ và $\mathcal{J}(C)^2 = -I_{2n}$. Đa thức $x^2 + 1$ có hai nghiệm phân biệt $\pm i$, nên $\mathcal{J}(C)$ chéo hóa được trên $\mathbb{C}$ và mọi trị riêng đều có môđun bằng 1. Vì vậy $\mathcal{J}(C)$ là elliptic.

Nếu $M = -CD^{-1}$ thì $\mathcal{J}(C)\mathcal{J}(D) = \begin{bmatrix} -CD^{-1} & 0 \\ 0 & -C^{-1}D \end{bmatrix}$. Vì C, D đối xứng, ta có $M^{-T} = -C^{-1}D$, từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh. □

Bổ đề 2.5 (Tiêu chuẩn phổ bậc bốn). *Cho* $F \in \mathsf{Sp}_4(\mathbb{R})$ *có đa thức đặc trưng* $\chi_F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$. *Nếu phương trình* $y^2 + ay + b - 2 = 0$ *có hai nghiệm thực phân biệt* $y_1, y_2 \in (-2,2)$ *thì* F *là elliptic.*

Chứng minh. Với $x \neq 0$, chia $\chi_F(x) = 0$ cho x^2 và đặt $y = x + x^{-1}$, ta được $y^2 + ay + b - 2 = 0$. Với mỗi $y_j \in (-2,2)$, phương trình $x^2 - y_j x + 1 = 0$ có hai nghiệm phức liên hợp phân biệt trên đường tròn đơn vị. Vì $y_1 \neq y_2$, bốn nghiệm thu được đôi một phân biệt. Do đó F có bốn trị riêng phân biệt, tất cả đều có môđun bằng 1; vì thế F chéo hóa được trên $\mathbb{C}$ và là elliptic. □

Với mọi $A \in M_2(\mathbb{R})$, ta có $A^T J_2 A = (\det A) J_2$; do đó $\mathsf{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$.

Bổ đề 2.6 (Trường hợp cấp hai). *Mọi* $A \in \mathsf{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$ *là tích của hai ma trận elliptic. Hơn nữa,* $\ell_{\text{ell}}\left(\mathsf{Sp}_2(\mathbb{R})\right) = 2$.

Chứng minh. Viết $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ và, với $\theta \in \mathbb{R}$, đặt $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Ma trận R_θ luôn elliptic. Đặt $F_\theta = R_{-\theta} A$. Vì $\det F_\theta = 1$, để F_θ elliptic chỉ cần chọn θ sao cho $|\mathrm{tr} F_\theta| < 2$, hoặc $F_\theta = \pm I_2$.

Ta có $\mathrm{tr} F_\theta = (a + d)\cos\theta + (b - c)\sin\theta$. Nếu $(a + d, b - c) \neq (0,0)$ thì tồn tại θ sao cho $\mathrm{tr} F_\theta = 0$. Khi đó đa thức đặc trưng của F_θ là $x^2 + 1$, nên F_θ có hai trị riêng $i, -i$ và chéo hóa được trên $\mathbb{C}$; vì vậy F_θ là elliptic. Do $A = R_\theta F_\theta$, ta thu được phân tích cần tìm.

Nếu $(a + d, b - c) = (0,0)$ thì $\mathrm{tr} A = 0$. Khi đó đa thức đặc trưng của A là $x^2 + 1$, nên chính A là elliptic và ta có thể viết $A = I_2 A$.

Email: sjttu@tqu.edu.vn

Như vậy $\ell_{\text{ell}}(A) \le 2$ với mọi $A \in \mathsf{Sp}_2(\mathbb{R})$. Mặt khác, với $t > 1$, ma trận $\mathsf{diag}(t, t^{-1})$ không elliptic và khác I_2, nên độ dài elliptic của nó không thể bằng 0 hoặc 1. Do đó $\ell_{\text{ell}}\left(\mathsf{Sp}_2(\mathbb{R})\right) = 2$. □

Hệ quả 2.7. *Với mọi $X, Y \in \mathsf{Sp}_2(\mathbb{R})$, ta có $\ell_{\text{ell}}(X \boxplus Y) \le 2$.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.6, ta có $\ell_{\text{ell}}(X), \ell_{\text{ell}}(Y) \le 2$. Áp dụng Hệ quả 2.3, suy ra $\ell_{\text{ell}}(X \boxplus Y) \le 2$. □

3. Results and discussion (Kết quả chính và thảo luận)

Đặt $J_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ và $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Phân loại của Theorem 4 trong Awa và de la Cruz (2020), sau khi viết trường hợp phân rã theo ký hiệu $\boxplus$, cho bổ đề sau.

Bổ đề 3.1 (Dạng chuẩn Awa–de la Cruz). *Mọi ma trận $A \in \mathsf{Sp}_4(\mathbb{R})$ đồng dạng symplectic thực với một trong các dạng sau:*

1. $P_1(\lambda) = J_2(\lambda)^{-1} \oplus J_2(\lambda)^T$, với $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$.
2. $P_2(\mu, \alpha) = \begin{bmatrix} \mu & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \alpha\mu & \alpha \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu \end{bmatrix}$, $\mu \in \{\pm 1\}, \alpha \in \{-1, 0, 1\}$.
3. $P_3(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$, $a^2 + b^2 \notin \{0, 1\}$.
4. $P_4(\theta, \alpha) = \begin{bmatrix} R_\theta & Q_{\theta,\alpha} \\ 0 & R_\theta \end{bmatrix}$, $Q_{\theta,\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & -\alpha\cot\theta \end{bmatrix}$, trong đó $\theta \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ và $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$.
5. $P_5(X, Y) = X \boxplus Y$, với $X, Y \in \mathsf{Sp}_2(\mathbb{R})$.

Bổ đề 3.2. *Với mọi $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$, ta có $\ell_{\text{ell}}\big(P_1(\lambda)\big) = 2$.*

Chứng minh. Đặt $s = \lambda^{-1}$ và $A_s = J_2(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -s^2 \\ 0 & s \end{bmatrix}$. Khi đó $P_1(\lambda) = A_s \oplus A_s^{-T}$. Chọn $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ và $C = \begin{bmatrix} s^2 & -s \\ -s & 0 \end{bmatrix}$. Hai ma trận C, D đều đối xứng khả nghịch vì $\det C = -s^2 \neq 0$ và $\det D = -1$. Hơn nữa, $D^{-1} = D$ và $A_s = -CD^{-1}$. Theo Bổ đề 2.4, $P_1(\lambda) = \mathcal{J}(C)\mathcal{J}(D)$, trong đó cả hai nhân tử đều elliptic. Suy ra $\ell_{\text{ell}}\big(P_1(\lambda)\big) \le 2$.

Mặt khác, phổ của $P_1(\lambda)$ là $\{s, s, s^{-1}, s^{-1}\}$. Vì $|s| \neq 1$, ma trận $P_1(\lambda)$ không elliptic; do đó $\ell_{\text{ell}}\big(P_1(\lambda)\big) = 2$. □

Email: sjttu@tqu.edu.vn

Bổ đề 3.3. *Với mọi* $\mu \in \{\pm 1\}$ *và* $\alpha \in \{-1,0,1\}$, *ta có* $\ell_{\text{ell}}\big(P_2(\mu,\alpha)\big) = 2$.

Chứng minh. Đặt $E = J_4 = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{bmatrix}$. Ta có $E^2 = -I_4$, nên E là elliptic. Đặt $F = E^{-1}P_2(\mu,\alpha) = -J_4P_2(\mu,\alpha)$. Vì E và $P_2(\mu,\alpha)$ đều symplectic nên $F \in \mathsf{Sp}_4(\mathbb{R})$. Tính trực tiếp, ta được:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\mu \\ \mu & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \alpha\mu & \alpha \end{bmatrix}$$

và $\chi_F(x) = x^4 - \alpha x^3 + x^2 - \alpha x + 1$. Theo Bổ đề 2.5, ta chỉ cần xét phương trình $y^2 - \alpha y - 1 = 0$. Hai nghiệm là $y_\pm = \frac{1}{2}\big(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+4}\big)$. Với $\alpha \in \{-1,0,1\}$, hai nghiệm này thực, phân biệt và đều thuộc $(-2,2)$, vì vậy F là elliptic và $P_2(\mu,\alpha) = EF$ là tích của hai ma trận elliptic.

Mặt khác, $P_2(\mu,\alpha)$ có đa thức đặc trưng $(x-\mu)^4$ nhưng $P_2(\mu,\alpha) \neq \mu I_4$. Một ma trận chéo hóa được và chỉ có một trị riêng μ phải bằng μI_4, nên $P_2(\mu,\alpha)$ không elliptic. Do đó $\ell_{\text{ell}}\big(P_2(\mu,\alpha)\big) = 2$. □

Bổ đề 3.4. *Với mọi* $a,b \in \mathbb{R}$ *thỏa* $a^2+b^2 \notin \{0,1\}$, *ta có* $\ell_{\text{ell}}\big(P_3(a,b)\big) = 2$.

Chứng minh. Đặt $A_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Khi đó $P_3(a,b) = A_{a,b} \oplus A_{a,b}^{-T}$. Chọn $D = \mathsf{diag}(1,-1)$ và $C = -A_{a,b}D = \begin{bmatrix} -a & b \\ b & a \end{bmatrix}$. Hai ma trận C, D đều đối xứng khả nghịch vì $\det C = -(a^2+b^2) \neq 0$ và $\det D = -1$. Hơn nữa, $D^{-1} = D$ và $A_{a,b} = -CD^{-1}$. Theo Bổ đề 2.4, $P_3(a,b) = \mathcal{J}(C)\mathcal{J}(D)$, trong đó hai nhân tử đều elliptic. Suy ra $\ell_{\text{ell}}\big(P_3(a,b)\big) \leq 2$.

Đặt $r = \sqrt{a^2+b^2}$. Hai trị riêng của $A_{a,b}$ là $a \pm ib$, đều có môđun r, còn hai trị riêng của $A_{a,b}^{-T}$ có môđun r^{-1}. Vì $r \neq 1$, ma trận $P_3(a,b)$ không elliptic, nên $\ell_{\text{ell}}\big(P_3(a,b)\big) = 2$. □

Bổ đề 3.5. *Với* $\theta \in (-\pi,\pi) \setminus \{0\}$ *và* $\alpha \in \{-1,0,1\}$, *ta có* $\ell_{\text{ell}}\big(P_4(\theta,0)\big) = 1$ *và* $\ell_{\text{ell}}\big(P_4(\theta,\alpha)\big) = 2$ *nếu* $\alpha = \pm 1$.

Chứng minh. Nếu $\alpha = 0$ thì $Q_{\theta,0} = 0$ và $P_4(\theta,0) = R_\theta \oplus R_\theta$. Ma trận này chéo hóa được trên $\mathbb{C}$ và mọi trị riêng đều thuộc $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$, nên elliptic. Vì $\theta \neq 0$, ta có $P_4(\theta,0) \neq I_4$, do đó $\ell_{\text{ell}}\big(P_4(\theta,0)\big) = 1$.

Giả sử $\alpha = \pm 1$. Trước hết, xét trường hợp $\cos\theta \neq 0$. Với $t > 0$, đặt $E_t = \mathcal{J}(tI_2)$ và $F_t = E_t^{-1}P_4(\theta,\alpha)$. Theo Bổ đề 2.4, E_t là elliptic, còn $F_t \in \mathsf{Sp}_4(\mathbb{R})$. Vì $E_t^{-1} = -E_t$, ta có:

Email: sjttu@tqu.edu.vn

$F_t = \begin{bmatrix} 0 & -tR_\theta \\ t^{-1}R_\theta & t^{-1}Q_{\theta,\alpha} \end{bmatrix}$

Tính trực tiếp, ta được $\chi_{F_t}(x) = x^4 + \beta_t x^3 + 2\cos(2\theta)\, x^2 + \beta_t x + 1$, trong đó $\beta_t = \frac{\alpha \cot\theta}{t}$. Theo Bổ đề 2.5, ta xét đa thức $q_t(y) = y^2 + \beta_t y - 4\sin^2\theta$. Chọn $t > \frac{1}{2|\sin\theta\cos\theta|}$. Khi đó $|\beta_t| < 2\cos^2\theta$ và

- $q_t(2) = 4\cos^2\theta + 2\beta_t > 0$
- $q_t(-2) = 4\cos^2\theta - 2\beta_t > 0$
- $q_t(0) = -4\sin^2\theta < 0$

Do đó q_t có hai nghiệm thực phân biệt, một nghiệm thuộc $(-2,0)$ và nghiệm kia thuộc $(0,2)$. Theo Bổ đề 2.5, F_t là elliptic. Vì vậy $P_4(\theta,\alpha) = E_t F_t$ là tích của hai ma trận elliptic.

Xét tiếp trường hợp $\cos\theta = 0$, tức là $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Chọn $\rho > 1/2$ và đặt $C_\rho = \begin{bmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{bmatrix}$, $E_\rho = \mathcal{J}(C_\rho)$, $F_\rho = E_\rho^{-1} P_4(\theta,\alpha)$. Theo Bổ đề 2.4, E_ρ là elliptic và $F_\rho \in \mathsf{Sp}_4(\mathbb{R})$. Tính trực tiếp, ta được:

$\chi_{F_\rho}(x) = x^4 - \frac{\alpha}{\rho}x^3 + 2x^2 - \frac{\alpha}{\rho}x + 1$

Phương trình tương ứng trong Bổ đề 2.5 là $y\left(y - \frac{\alpha}{\rho}\right) = 0$. Vì $\rho > \frac{1}{2}$, hai nghiệm 0 và $\frac{\alpha}{\rho}$ phân biệt và đều thuộc $(-2,2)$. Do đó F_ρ là elliptic, nên $P_4(\theta,\alpha)$ là tích của hai ma trận elliptic.

Cuối cùng, ta chứng minh $P_4(\theta,\alpha)$ không elliptic khi $\alpha = \pm 1$. Đặt $f_\theta(x) = x^2 - 2\cos\theta\ x + 1$. Do $P_4(\theta,\alpha)$ là ma trận khối tam giác trên với hai khối chéo bằng R_θ, ta có $\chi_{P_4(\theta,\alpha)}(x) = f_\theta(x)^2$. Mặt khác, vì $f_\theta(R_\theta) = 0$, ta được

$f_\theta\big(P_4(\theta,\alpha)\big) = \begin{bmatrix} 0 & T_{\theta,\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, trong đó $T_{\theta,\alpha} = \alpha \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \neq 0$

Vì $\theta \in (-\pi,\pi) \setminus \{0\}$, đa thức f_θ có hai nghiệm phân biệt $e^{\pm i\theta}$. Nếu $P_4(\theta,\alpha)$ chéo hóa được trên $\mathbb{C}$ thì đa thức tối tiểu của nó phải chia f_θ, kéo theo $f_\theta\big(P_4(\theta,\alpha)\big) = 0$, mâu thuẫn. Vậy $P_4(\theta,\alpha)$ không elliptic khi $\alpha = \pm 1$. Kết hợp với phân tích ở trên, ta suy ra $\ell_{\mathrm{ell}}\big(P_4(\theta,\alpha)\big) = 2$. □

Bổ đề 3.6. *Với mọi $X, Y \in \mathsf{Sp}_2(\mathbb{R})$, ta có $\ell_{\mathrm{ell}}\big(P_5(X,Y)\big) \leq 2$.*

Chứng minh. Đây chính là Hệ quả 2.7. □

Chứng minh Định lý 1.2 (Định lý chính).

Email: sjttu@tqu.edu.vn

Cho $A \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$. Theo Bổ đề 3.1, tồn tại $S \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ sao cho SAS^{-1} thuộc một trong năm họ $P_1, \ldots, P_5$. Các Bổ đề 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 và 3.6 cho $\ell_{\mathrm{ell}}(SAS^{-1}) \leq 2$. Theo Bổ đề 2.1, ta có $\ell_{\mathrm{ell}}(A) \leq 2$. Vì A tùy ý, suy ra $\ell_{\mathrm{ell}}\left(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})\right) \leq 2$.

Mặt khác, theo Bổ đề 3.2, chẳng hạn $P_1(2)$ có độ dài elliptic bằng 2. Do đó $\ell_{\mathrm{ell}}\left(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})\right) \geq 2$, và suy ra $\ell_{\mathrm{ell}}\left(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})\right) = 2$. □

4. CONCLUSION (KẾT LUẬN)

Như vậy, với mọi $A \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$, ta có $\ell_{\mathrm{ell}}(A) = 0$ khi và chỉ khi $A = I_4$; $\ell_{\mathrm{ell}}(A) = 1$ khi và chỉ khi $A \neq I_4$ và A elliptic; còn $\ell_{\mathrm{ell}}(A) = 2$ trong mọi trường hợp còn lại. Nói cách khác, độ dài elliptic trên $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ được xác định hoàn toàn và giá trị lớn nhất bằng 2.

Kết quả này cũng gợi ra bài toán tương tự đối với $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ khi $n > 2$. Từ Hệ quả 2.3 và Bổ đề 2.6, nếu một ma trận $A \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ đồng dạng symplectic thực với một tổng mở rộng $A_1 \boxplus \ldots \boxplus A_n$, trong đó $A_j \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$, thì $\ell_{\mathrm{ell}}(A) \leq 2$. Vì vậy, khó khăn của trường hợp tổng quát không nằm ở các dạng phân rã thành các khối symplectic cấp hai mà ở các khối không phân rã có kích thước lớn hơn. Đối với các khối như vậy, hai kỹ thuật được sử dụng trong bài là phân tích bằng các cấu trúc phức symplectic và kiểm soát phổ thông qua đa thức đặc trưng đối xứng vẫn có thể là những công cụ thích hợp. Tuy nhiên, khi số chiều tăng, cấu trúc của các dạng chuẩn phức tạp hơn và việc đưa điều kiện phổ về một phương trình bậc hai như trong trường hợp cấp bốn không còn áp dụng trực tiếp. Do đó, việc xác định $\ell_{\mathrm{ell}}\left(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})\right)$, hoặc tìm một cận trên không phụ thuộc vào n, là một hướng nghiên cứu tự nhiên tiếp theo.

Acknowledgements (Lời cảm ơn)

Bài nghiên cứu này được thực hiện trong khuôn khổ đề tài nghiên cứu khoa học, với mã số đề tài **06-2026-HV-CB2**. Tác giả xin chân thành cảm ơn sự hỗ trợ từ Học Viện Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông để hoàn thành nghiên cứu này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Awa, D., & de la Cruz, R. J. (2020). Every real symplectic matrix is a product of real symplectic involutions. *Linear Algebra and its Applications*, *589*, 85–95. https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.12.012

[2]. de la Cruz, R. J. (2015). Each symplectic matrix is a product of four symplectic involutions. *Linear Algebra and its Applications*, *466*, 382–400. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.10.024

[3]. de la Cruz, R. J., & Granario, D. Q. (2018). Products of symplectic normal matrices. *Linear Algebra and its Applications*, *543*, 162–172. https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.12.022

[4]. de Seguins Pazzis, C. (2024a). Products of involutions in symplectic groups over general fields (I). *Linear Algebra and its Applications*, *694*, 441–477. https://doi.org/10.1016/j.laa.2024.04.018

[5]. de Seguins Pazzis, C. (2024b). Products of unipotent elements of index 2 in orthogonal and symplectic groups. *Linear Algebra and its Applications*, *698*, 406–447. https://doi.org/10.1016/j.laa.2024.06.012

[6]. Ellers, E. W., & Villa, O. (2020). Generation of the symplectic group by involutions. *Linear Algebra and its Applications*, *591*, 154–159. https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.01.002

[7]. Granario, D. Q., & Tam, T.-Y. (2021). Products of positive definite symplectic matrices. *Linear Algebra and its Applications*, *626*, 188–203. https://doi.org/10.1016/j.laa.2021.05.016

[8]. Joven, J. P. E., & Paras, A. T. (2023). Products of skew-involutions. *Electronic Journal of Linear Algebra*, *39*, 136–150. https://doi.org/10.13001/ela.2023.7709

[9]. Wall, G. E. (1963). On the conjugacy classes in the unitary, symplectic and orthogonal groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, *3*(1), 1–62. https://doi.org/10.1017/S1446788700027622

[10]. Wonenburger, M. J. (1966). Transformations which are products of two involutions. *Journal of Mathematics and Mechanics*, *16*(4), 327–338.