

## EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF THE FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

Nguyen Diep<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>*Faculty of General Education, Ho Chi Minh City College of Industry and Trade, Vietnam*

Email address: nguyendiep@hitu.edu.vn

\*Corresponding Author: Nguyen Diep

<https://doi.org/10.51453/3093-3706/2025/1369>

| ARTICLE INFO                                                     |            | ABSTRACT                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Received:</b>                                                 | 13/11/2025 | In this paper, we investigate the existence and uniqueness of solutions for a class of fractional differential equations involving the $\Psi$ -Caputo fractional derivative. By transforming the original problem into an equivalent integral equation, we construct an appropriate operator in the space of continuous functions. Under suitable Lipschitz assumptions on the nonlinear function $F$ , the Banach and Schauder fixed point theorems are applied to establish sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions. The obtained results extend and complement several known results in the theory of fractional differential equations, while also clarifying the role of the $\Psi$ -Caputo fractional derivative as a generalized framework encompassing various classical fractional derivatives. This study provides a theoretical foundation for the application of fractional differential models in describing memory-dependent phenomena arising in physics, engineering, and biology. |
| <b>Revised:</b>                                                  | 15/12/2025 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Published:</b>                                                | 28/12/2025 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| KEYWORDS                                                         |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Fractional derivative;<br>Differential equation;<br>Fixed point. |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

## SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BẬC PHÂN THỨ

Nguyễn Điệp<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>*Khoa Giáo dục Đại cương, Trường Cao đẳng Công thương TP. Hồ Chí Minh, Việt Nam*

Địa chỉ email: nguyendiep@hitu.edu.vn

\*Tác giả liên hệ: Nguyễn Điệp

<https://doi.org/10.51453/3093-3706/2025/1369>

| THÔNG TIN BÀI BÁO                                            | TÓM TẮT                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Ngày nhận bài:</b> 13/11/2025                             | Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của một lớp phương trình vi phân phân thứ sử dụng đạo hàm $\Psi$ -Caputo. Bằng cách chuyển bài toán ban đầu về một phương trình tích phân tương đương, chúng tôi xây dựng một toán tử thích hợp trong không gian hàm liên tục. Dựa trên các giả thiết Lipschitz đối với hàm phi tuyến $F$ , các định lý điểm bất động Banach và Schauder được áp dụng nhằm thiết lập các điều kiện đủ bảo đảm sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán. Các kết quả thu được mở rộng và bổ sung cho một số kết quả đã biết trong lý thuyết phương trình vi phân phân thứ, đồng thời làm rõ vai trò của đạo hàm $\Psi$ -Caputo như một công cụ |
| <b>Ngày hoàn thiện:</b> 15/12/2025                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Ngày đăng:</b> 28/12/2025                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| TỪ KHÓA                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Đạo hàm phân thứ;<br>Phương trình vi phân;<br>Điểm bất động. |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

tổng quát hóa nhiều dạng đạo hàm phân thứ quen thuộc. Nghiên cứu này góp phần cung cấp cơ sở lý thuyết cho việc áp dụng các mô hình vi phân phân thứ trong việc mô tả các hiện tượng có tính nhớ trong vật lý, kỹ thuật và sinh học.

## 1. Giới thiệu

Nguồn gốc của khái niệm đạo hàm phân thứ có thể được truy tìm từ một trao đổi thư từ giữa L'Hopital và Leibniz. Cụ thể, trong thư ngày 30 tháng 9 năm 1695, L'Hopital đã đặt câu hỏi cho Leibniz về ý nghĩa của ký hiệu  $\frac{D^n}{Dx^n}$ , vốn được Leibniz dùng để chỉ đạo hàm bậc  $n$  của hàm  $f(x)=x$ ,

trong trường hợp  $n$  là một phân số, ví dụ như  $n=\frac{1}{2}$ . Phản hồi của Leibniz, "*Someday it would lead to*

*useful consequences*", đã khơi gợi sự quan tâm đến lĩnh vực này. Tiếp nối ý tưởng đó, nhiều nhà toán học sau này đã đóng góp vào việc phát triển các định nghĩa về đạo hàm phân thứ, bao gồm (Lacroix, 1819), (Fourier, 1822), (Abel, 1823), và (Liouville, 1832), cùng nhiều người khác.

Trong những thập kỷ vừa qua, lĩnh vực giải tích phân thứ và các phương trình vi phân liên quan đã trở thành một chủ đề nghiên cứu thu hút sự chú ý đáng kể trong cộng đồng toán học.

Trước sự đa dạng của các khái niệm đạo hàm phân thứ, (Kilbas, 2006) đã đề xuất một định nghĩa tổng quát hơn, được gọi là đạo hàm phân thứ tổng quát của hàm  $f$  theo hàm  $\Psi$ . Định nghĩa này được biểu diễn bởi công thức:

$$D_{a+}^{\alpha, \Psi} f(x) = \left( \frac{1}{\Psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n I_{a+}^{n-\alpha, \Psi} f(x),$$

trong đó,  $I_{a+}^{n-\alpha, \Psi}$  đại diện cho toán tử tích phân  $\Psi$ -Riemann-Liouville tác động lên hàm  $f$  theo hàm  $\Psi$  (chi tiết xem Mục 1). Điểm đặc biệt của định nghĩa này là việc lựa chọn hàm  $\Psi$  khác nhau sẽ dẫn đến các dạng đạo hàm phân thứ cụ thể khác nhau (Kilbas, 2006).

Trong bài báo này, chúng tôi xét bài toán sau:

$$\begin{cases} {}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} \xi(t) = \lambda \xi(t) + \mathbf{F}(t, \xi(t)), & t \in I, \\ \xi(a) = \xi_a \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.1)$$

trong đó  $\alpha \in (0, 1)$ ,  ${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} \xi(t)$  là đạo hàm phân thứ  $\Psi$ -Caputo được xác định như trong Định nghĩa 2.2;

$\mathbf{F}: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  và  $\lambda$  là số không âm.

Trong xuyên suốt bài báo này, chúng ta giả sử rằng hàm  $\mathbf{F}: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  và  $\mathbf{F}: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn các giả thuyết sau:

(A1) Hàm  $\mathbf{F}$  liên tục trên  $I$ ;

(A2) Tồn tại hằng số dương  $M$  sao cho

$$|\mathbf{F}(t, \varphi_1) - \mathbf{F}(t, \varphi_2)| \leq M |\varphi_1 - \varphi_2|, \text{ với mọi } t \in I \text{ và } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R};$$

(A3)  $F = \sup_{t \in I} F(t, 0)$ .

Ký hiệu  $C^n(I, \mathbf{R})$  là không gian của tất cả các hàm số khả vi và liên tục  $n$  lần từ  $I$  vào  $\mathbf{R}$ , với chuẩn được định nghĩa như sau:

$$\|\xi\|_n = \sum_{i=0}^{n-1} \|\xi^{(i)}\| + \|\xi^{(n)}\|_0,$$

trong đó  $n=0$ , ta có  $C^0(I, \mathbf{R}) = C(I, \mathbf{R})$  và  $\|\xi\|_0 = \max_{t \in I} |\xi(t)|$ .

## 2. Nội dung

### 2.1. Kiến thức chuẩn bị

Mục này trình bày các kết quả cơ bản của giải tích phân thứ, gồm đạo hàm và tích phân  $\Psi$ -Riemann–Liouville,  $\Psi$ -Caputo, cùng một số bổ đề, định lý hỗ trợ. Chi tiết chứng minh xem trong Almeida (Ricardo Almeida, 2017), (Sousa, 2018) và (Oliveira, 2019), (Pachpatte, 2001).

### 2.1.1. Giải tích phân thứ tổng quát

**Định nghĩa 2.1.** (Ricardo Almeida, 2017) Cho  $\alpha > 0$  và  $f$  là hàm khả tích trên  $I$  và  $\Psi \in C^1(I)$  là hàm dương và đơn điệu tăng sao cho  $\Psi'(x) \neq 0$ , với mọi  $x \in I$ . Tích phân phân thứ và đạo hàm phân thứ  $\Psi$ -Riemann-Liouville của hàm  $f$  đối với  $\Psi$  được định nghĩa như sau:

$$I_{a+}^{\alpha, \Psi} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \Psi'(t) (\Psi(x) - \Psi(t))^{\alpha-1} f(t) dt$$

và

$$D_{a+}^{\alpha, \Psi} f(x) := \left( \frac{1}{\Psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n I_{a+}^{n-\alpha, \Psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{1}{\Psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \Psi'(t) (\Psi(x) - \Psi(t))^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

trong đó  $n = [\alpha] + 1$ .

**Tính chất 2.1.** (Sousa và Oliveira [2]) Cho  $\alpha > 0$  và  $\beta > 0$ . Khi đó, ta có

$$I_{a+}^{\alpha, \Psi} I_{a+}^{\beta, \Psi} f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta, \Psi} f(x).$$

**Định nghĩa 2.2.** (Almeida [1]) Cho  $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}$  và  $f, \Psi \in C^n(I)$  là hai hàm số sao cho  $\Psi$  là hàm dương và đơn điệu tăng sao cho  $\Psi'(x) \neq 0$ , với mọi  $x \in I$ . Đạo hàm phân thứ  $\Psi$ -Caputo bên trái của  $f$  cấp  $\alpha$  được định nghĩa như sau:

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} f(x) := I_{a+}^{n-\alpha, \Psi} \left( \frac{1}{\Psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n f(x),$$

trong đó,  $n = \begin{cases} [\alpha] + 1, & \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha, & \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Để thuận tiện, chúng ta ký hiệu

$$f_{\Psi}^{[n]} f(x) := \left( \frac{1}{\Psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n f(x).$$

Từ Định nghĩa 2.2, ta nhận thấy rằng: nếu  $\alpha = m \in \mathbb{N}$ , thì

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} f(x) = f_{\Psi}^{[m]}(x).$$

và nếu  $\alpha \notin \mathbb{N}$  thì

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \Psi'(t) (\Psi(x) - \Psi(t))^{n-\alpha-1} f_{\Psi}^{[n]}(t) dt.$$

Trong trường hợp  $\alpha \in (0, 1)$ , ta được

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (\Psi(x) - \Psi(t))^{-\alpha} f'(t) dt.$$

**Định lý 2.1.** (Almeida [1]) Cho  $f, \Psi \in C^{n+1}[a, b]$ . Khi đó, ta có

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} f(x) = \frac{(\Psi(x) - \Psi(a))^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f_{\Psi}^{[n]}(a) + \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_a^x (\Psi(x) - \Psi(t))^{n-\alpha} \frac{d}{dt} f_{\Psi}^{[n]}(t) dt.$$

**Ví dụ 2.1.** Xét hàm số sau:

$$f(x) = (\Psi(x) - \Psi(a))^{\beta-1}, \quad \beta > n.$$

Vì

$$f_{\Psi}^{[n]}(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)} (\Psi(x) - \Psi(a))^{\beta-n-1}.$$

Với  $\alpha > 0$ , ta có

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} f(x) = \frac{(\Psi(x) - \Psi(a))^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f_{\Psi}^{[n]}(a) + \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_a^x (\Psi(x) - \Psi(t))^{n-\alpha} \frac{d}{dt} f_{\Psi}^{[n]}(t) dt.$$

Thực hiện phép đổi biến  $u = \frac{\Psi(t) - \Psi(a)}{\Psi(x) - \Psi(a)}$ , ta được

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)} (\Psi(x) - \Psi(a))^{\beta-\alpha-1} B(n-\alpha, \beta-n),$$

trong đó,  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ ,  $x, y > 0$ .

Từ ví dụ trên, ta có thể thấy với  $n \leq k \in \mathbb{N}$ , ta có

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} (\Psi(x) - \Psi(a))^k = \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} (\Psi(x) - \Psi(a))^{k-\alpha}.$$

Mặt khác, với  $n > k \in \mathbb{N}_0$ , ta cũng có

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} (\Psi(x) - \Psi(a))^k = 0,$$

vì

$$D_{\Psi}^n (\Psi(x) - \Psi(a))^k = 0.$$

**Mối quan hệ giữa đạo hàm phân thứ  $\Psi$ -Riemann-Liouville và đạo hàm phân thứ  $\Psi$ -Caputo.**

**Định lý 2.2.** (Almeida [1]) Nếu  $f \in C^n[a, b]$  và  $\alpha > 0$ , thì

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} f(x) = D_{a+}^{\alpha, \Psi} \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\Psi(x) - \Psi(a))^k f_{\Psi}^{[k]}(a) \right].$$

**Bổ đề 2.1.** (Almeida [1]) Cho  $\alpha > 0$  và  $\beta > 1$ . Khi đó, các điều sau đây thỏa mãn

$$I_{a+}^{\alpha, \Psi} (\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (\psi(t) - \psi(a))^{\alpha + \beta - 1}$$

và

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} (\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (\psi(t) - \psi(a))^{\alpha - \beta - 1}.$$

**Mối quan hệ giữa đạo hàm phân thứ và tích phân phân thứ.**

Giống như vi-tích phân cổ điển, đạo hàm phân thứ  $\Psi$ -Caputo là một phép toán tử nghịch đảo trái của tích phân phân thứ đối với hàm  $\Psi$ . Có thể thấy trong định lý sau:

**Định lý 2.3.** (Almeida [1]) Cho  $f \in C^1[a, b]$  và  $\alpha > 0$ , ta có

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} I_{a+}^{\alpha, \Psi} f(x) = f(x).$$

Nhưng trong tổng quát, đạo hàm phân thứ  $\Psi$ -Caputo là không phải là một phép toán tử nghịch đảo phải của tích phân phân thứ đối với hàm  $\Psi$ . Điều này được chỉ ra trong định lý sau:

**Định lý 2.4.** (Almeida [1]) Cho  $f \in C^n[a, b]$  và  $\alpha > 0$ , ta có

$$I_{a+}^{\alpha, \Psi} ({}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi}) f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_{\Psi}^{[k]}(a)}{k!} (\Psi(x) - \Psi(a))^k.$$

Trong trường hợp  $\alpha \in (0, 1)$ , thì ta có

$$I_{a+}^{\alpha, \Psi} ({}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi}) f(x) = f(x) - f(a).$$

**Định lý 2.5.** (Almeida [1]) Cho  $f, g \in C^m[a, b]$  và  $\alpha > 0$ . Khi đó, ta có

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} f(x) = {}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (\Psi(x) - \Psi(a))^k,$$

trong đó  $c_k$  là các hằng số bất kỳ.

### 2.1.2. Một vài kết quả bổ trợ

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một số bổ đề và định lý dùng để chứng minh các kết quả chính của bài báo này.

**Bổ đề 2.2.** (Sousa và Oliveira [3]) Cho  $\Psi \in C^1(I)$  là hàm dương và đơn điệu tăng sao cho  $\Psi'(x) \neq 0$ , với mọi  $x \in I$ ,  $u(t)$  và  $v(t)$  là các hàm số khả tích trên  $I$ , và  $w \in C(I, \mathbf{R})$ . Giả sử  $v$  và  $w$  là hai hàm số không âm và tăng trên  $I$ . Nếu

$$u(t) \leq v(t) + w(t) \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t, s) u(s) ds,$$

thì

$$u(t) \leq v(t) \mathbb{E}_\alpha \left( w(t) \Gamma(\alpha) (\Psi(t) - \Psi(a))^\alpha \right),$$

trong đó  $\mathbb{E}_\alpha(z)$  là hàm Mittag-Leffler được định nghĩa như sau:

$$\mathbb{E}_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}, \quad \alpha > 0, k \in \mathbb{N}.$$

**Bổ đề 2.3.** (Pachpatte [4]) Cho  $u, v, c \in C(I, \mathbf{R}_+)$  và  $h(t)$  là hàm số liên tục, không âm và tăng trên  $I$ . Nếu

$$u(t) \leq h(t) + \int_a^t v(s) \left[ u(s) + \int_a^s c(\tau) u(\tau) d\tau \right] ds,$$

thì ta có

$$u(t) \leq h(t) \left[ 1 + \int_a^t v(s) \exp \left( \int_a^s [v(\tau) + c(\tau)] d\tau \right) ds \right] \quad \text{với } t \in I$$

**Định lý 2.6.** (Khamsi và Kirk [5]) Cho  $\mathbf{X}$  là không gian Banach và  $A \subset \mathbf{X}$  là một tập con đóng, khác rỗng. Giả sử  $\gamma_n \geq 0, n = 0, 1, 2, \dots$  là một dãy sao cho  $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$  hội tụ. Nếu ánh xạ  $\mathbf{U}: A \rightarrow A$  thỏa mãn bất đẳng thức sau:

$$\|\mathbf{U}^n u - \mathbf{U}^n v\| \leq \gamma_n \|u - v\|,$$

với mỗi  $n = 0, 1, 2, \dots$  và  $u, v \in A$ . Khi đó, ánh xạ  $\mathbf{U}$  có điểm cố định duy nhất  $u^*$ . Hơn nữa, dãy  $\{\mathbf{U}^n u_0\}_{n=1}^{\infty}$  hội tụ đến điểm cố định  $u^*$  với mọi  $u_0 \in A$ .

### 2.2. Kết quả chính

Để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (1.1). Trước tiên, chúng tôi chứng minh: bài toán (1.1) tương đương với phương trình tích phân.

**Bổ đề 2.4.** Cho  $F$  là hàm số liên tục, và  $\lambda$  là hằng số không âm. Khi đó,  $\xi \in C^1(I, \mathbf{R})$  là nghiệm của bài toán (1.1) khi và chỉ khi  $\xi$  thỏa mãn phương trình tích phân sau:

$$\xi(t) = \xi_a + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t, s) \xi(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t, s) F(s, \xi(s)) ds, \quad \forall t \in I. \quad (2.2)$$

trong đó,  $\Psi^{\alpha-1}(t, s) = \Psi'(t) (\Psi(t) - \Psi(s))^{\alpha-1}$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $\xi \in C^1(I, \mathbf{R})$  là nghiệm của bài toán (1.1). Ta đặt

$$\mathbf{H}(t) = \lambda \xi(t) + \mathbf{F}(t, \xi(t)).$$

Bài toán (1.1) được viết lại như sau:

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} \xi(t) = \mathbf{H}(t).$$

Bằng cách lấy tích phân  $I_{a+}^{\alpha, \Psi}$  cả hai vế của phương trình trên và áp dụng Định lý 2.4, ta thu được

$$I_{a+}^{\alpha, \Psi} ({}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi}) \xi(t) = I_{a+}^{\alpha, \Psi} \mathbf{H}(t)$$

hay

$$\xi(t) - \xi(a) = I_{a+}^{\alpha, \Psi} \mathbf{H}(t).$$

Vì vậy, ta có

$$\xi(t) = \xi_a + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t, s) \xi(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t, s) \mathbf{F}(s, \xi(s)) ds, \forall t \in I.$$

Ngược lại, giả sử rằng  $\xi \in C^1(I, \mathbb{R})$  là nghiệm của phương trình tích phân (2.2). Bây giờ, chúng ta chứng minh  $\xi$  cũng là nghiệm của bài toán (1.1). Lấy đạo hàm  ${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi}$  hai vế của bài toán (2.2) và áp dụng Định lý 2.4, ta thu được

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} \xi(t) = {}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} (I_{a+}^{\alpha, \Psi}) \mathbf{H}(t) = \mathbf{H}(t).$$

Điều này có nghĩa là

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \Psi} \xi(t) = \mathbf{H}(t).$$

Do đó, hàm  $\xi$  là nghiệm của bài toán (1.1).

**Định lý 2.7.** Giả sử  $\mathbf{F}$  thỏa mãn các giả thuyết (A1)–(A3). Nếu

$$\frac{(\psi(b) - \psi(a))^\alpha [\lambda + M + F]}{\Gamma(1 + \alpha)} < 1, \quad (2.3)$$

thì bài toán (1.1) có nghiệm duy nhất trên  $I$ .

*Chứng minh.* Trước tiên, ta định nghĩa

$$\mathbb{B}_\rho := \left\{ \xi : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \xi(a) = \xi_a \in \mathbb{R} \text{ and } \sup_{t \in I} |\xi(t) - \xi_a| \leq \rho \right\},$$

trong đó  $\rho$  thỏa mãn

$$\rho \geq |\xi_a| \left( \left( \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{(\psi(b) - \psi(a))^\alpha (\lambda + M + F)} - 1 \right)^{-1} \right).$$

Toán tử  $\mathbf{U} : \mathbb{B}_\rho \rightarrow \mathbb{B}_\rho$  được định nghĩa như sau:

$$(\mathbf{U}\xi)(t) = \xi_a + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t, s) \xi(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t, s) \mathbf{F}(s, \xi(s)) ds, \forall t \in I \quad (2.4)$$

Để chứng minh định lý này, chúng tôi sử dụng định lý điểm bất động Banach (Định lý 2.6) và chia thành các bước chứng minh sau:

- $\mathbf{U}\xi \in \mathbb{B}_\rho$  với mọi  $\xi \in \mathbb{B}_\rho$ .
- $\mathbf{U} : \mathbb{B}_\rho \rightarrow \mathbb{B}_\rho$  là toán tử liên tục.
- $\{\mathbf{U}\xi_m\}_{m=0}^\infty$  hội tụ.

**Bước 1.** Dựa vào định nghĩa  $\mathbb{B}_\rho$  và giả thuyết (A2), chúng ta có đánh giá sau:

$$|\xi(t)| \leq |\xi(t) - \xi_a| + |\xi_a| \leq \rho + |\xi_a|, \quad \forall t \in I, \quad (2.5)$$

từ đây suy ra

$$|\mathbf{F}(s, \xi(s))| \leq |\mathbf{F}(s, \xi(s)) - \mathbf{F}(s, 0)| + |\mathbf{F}(s, 0)| \leq M |\xi(s)| + F \leq M\rho + F, \quad \forall t \in I. \quad (2.6)$$

Thực hiện các biến đổi cơ bản, ta được đánh giá sau:

$$\begin{aligned} |(\mathbf{U}\xi)(t) - \xi_a| &\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t,s) |\xi(s)| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t,s) |\mathbf{F}(s, \xi(s))| ds \\ &\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t,s) |\xi(s)| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t,s) |\mathbf{F}(s, 0)| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t,s) |\mathbf{F}(s, \xi(s)) - \mathbf{F}(s, 0)| ds. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Kết hợp các đánh giá (2.5), (2.6) và (2.7), và áp dụng Bổ đề 2.1, ta được

$$|(\mathbf{U}\xi)(t) - \xi_a| \leq \frac{\lambda(\rho + |\xi_a|) + M\rho + F}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t,s) ds \leq \frac{(\rho + |\xi_a|)(\lambda + M) + F}{\Gamma(1+\alpha)} (\psi(b) - \psi(a))^\alpha \leq \rho \quad (2.8)$$

Từ đây, ta suy ra  $\mathbf{U}\xi \in \mathbb{B}_\rho$  với mọi  $\xi \in \mathbb{B}_\rho$ .

**Bước 2.** Với  $a \leq t_1 < t_2 \leq b$  và  $\xi \in \mathbb{B}_\rho$ , ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned} |(\mathbf{U}\xi)(t_2) - (\mathbf{U}\xi)(t_1)| &\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \left( \left| \int_a^{t_1} (\Psi^{\alpha-1}(t_2,s) - \Psi^{\alpha-1}(t_1,s)) \xi(s) ds - \int_{t_1}^{t_2} \Psi^{\alpha-1}(t_2,s) \xi(s) ds \right| \right) \\ &\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t_1} (\Psi^{\alpha-1}(t_2,s) - \Psi^{\alpha-1}(t_1,s)) \mathbf{F}(s, \xi(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \Psi^{\alpha-1}(t_2,s) \mathbf{F}(s, \xi(s)) ds \right|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Mặc khác, từ (2.5) và (2.6) ta cũng có các đánh giá

$$\int_a^{t_1} (\Psi^{\alpha-1}(t_2,s) - \Psi^{\alpha-1}(t_1,s)) |\xi(s)| ds \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} (\rho + |\xi_a|) [(\psi(t_2) - \psi(a))^\alpha - (\psi(t_1) - \psi(a))^\alpha];$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi^{\alpha-1}(t_2,s) |\xi(s)| ds \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} (\rho + |\xi_a|) (\psi(t_2) - \psi(t_1))^\alpha;$$

$$\int_a^{t_1} (\Psi^{\alpha-1}(t_2,s) - \Psi^{\alpha-1}(t_1,s)) |\mathbf{F}(s, \xi(s))| ds \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} (M(\rho + |\xi_a|) + F) [(\psi(t_2) - \psi(a))^\alpha - (\psi(t_1) - \psi(a))^\alpha]$$

và

$$\int_{t_1}^{t_2} \Psi^{\alpha-1}(t_2,s) |\mathbf{F}(s, \xi(s))| ds \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} (M(\rho + |\xi_a|) + F) (\psi(t_2) - \psi(t_1))^\alpha.$$

Áp dụng bất đẳng thức  $e_1^\alpha - e_2^\alpha \leq (e_1 - e_2)^\alpha$ , trong đó  $0 \leq e_2 \leq e_1$  và  $\alpha \in (0,1)$ , chúng ta thu được đánh giá sau:

$$|(\mathbf{U}\xi)(t_2) - (\mathbf{U}\xi)(t_1)| \leq 2 \left[ \frac{\lambda(\rho + |\xi_a|)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{M(\rho + |\xi_a|) + F}{\Gamma(\alpha+1)} \right] (\psi(t_2) - \psi(t_1))^\alpha. \quad (2.10)$$

Điều này có nghĩa là  $|(\mathbf{U}\xi)(t_2) - (\mathbf{U}\xi)(t_1)| \rightarrow 0$  khi  $t_2 \rightarrow t_1$  hay  $\mathbf{U}$  là toán tử liên tục.

**Bước 3.** Tiếp theo, chúng ta chứng minh đối với mọi  $m \in \{0,1,2,\dots\}$  và mọi  $t \in I$ , ta có

$$\|\mathbf{U}^m \xi - \mathbf{U}^m \xi\|_0 \leq \frac{(\lambda + M)^m}{\Gamma(1+m\alpha)} (\psi(t) - \psi(a))^{m\alpha} \|\xi - \xi\|_0. \quad (2.11)$$

Khẳng định này có thể được chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Dễ thấy rằng trong trường hợp  $m=0$ , thì bất đẳng thức (2.11) luôn đúng. Thực hiện các bước quy nạp toán học, ta có

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}^m \xi - \mathbf{U}^m \xi\|_0 &= \|\mathbf{U}(\mathbf{U}^{m-1} \xi) - \mathbf{U}(\mathbf{U}^{m-1} \xi)\|_0 \\ &= \xi_a + \max_{t \in I} \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t,s) |\mathbf{U}^{m-1} \xi(s) - \mathbf{U}^{m-1} \xi(s)| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \max_{t \in I} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t,s) |\mathbf{F}(s, \mathbf{U}^{m-1} \xi(s)) - \mathbf{F}(s, \mathbf{U}^{m-1} \xi(s))| ds. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Theo giả thuyết (A2), với mọi  $t \in I$  và  $\xi, \xi \in \mathbb{B}_\rho$  và thực hiện các tính toán cơ bản, ta được

$$\begin{aligned} \| \mathbf{U}^1 \xi - \mathbf{U}^1 \xi \|_0 &\leq \frac{\lambda + M}{\Gamma(\alpha)} \max_{t \in I} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t, s) |\xi(s) - \xi(s)| ds \\ &\leq \frac{\lambda + M}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t, s) ds \right) \| \xi - \xi \|_0 \leq \frac{\lambda + M}{\Gamma(1+\alpha)} (\psi(t) - \psi(a))^\alpha \| \xi - \xi \|_0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Với mỗi  $m \geq 2$ , từ giả thuyết (A2) và đánh giá (2.12), ta có

$$\left| \mathbf{U}^m \xi(t) - \mathbf{U}^m \xi(t) \right| \leq \frac{\lambda + M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t, s) \left| \mathbf{U}^{m-1} \xi(s) - \mathbf{U}^{m-1} \xi(s) \right| ds. \quad (2.14)$$

Với  $m=2$ , từ Bổ đề 2.1 và (2.13), ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned} \| \mathbf{U}^2 \xi - \mathbf{U}^2 \xi \|_0 &\leq \frac{\lambda + M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t, s) \| \mathbf{U}^1 \xi - \mathbf{U}^1 \xi \|_0 ds \\ &\leq \frac{(\lambda + M)^2}{\Gamma(1+2\alpha)} (\psi(b) - \psi(a))^{2\alpha} \| \xi - \xi \|_0, \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Giả sử rằng bất đẳng thức (2.11) luôn đúng với  $m=k>0$ , nghĩa là

$$\| \mathbf{U}^k \xi - \mathbf{U}^k \xi \|_0 \leq \frac{(\lambda + M)^k}{\Gamma(1+k\alpha)} (\psi(b) - \psi(a))^{k\alpha} \| \xi - \xi \|_0. \quad (2.15)$$

Thì từ giả thuyết (A2), Bổ đề 2.1, các đánh giá (2.12), (2.14), (2.15) và thực hiện các tính toán cơ bản, ta thu được đánh giá sau:

$$\begin{aligned} \| \mathbf{U}^{k+1} \xi - \mathbf{U}^{k+1} \xi \|_0 &\leq \frac{\lambda + M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \Psi^{\alpha-1}(t, s) \| \mathbf{U}^k \xi - \mathbf{U}^k \xi \|_0 ds \\ &\leq \frac{(\lambda + M)^{k+1}}{\Gamma(1+(k+1)\alpha)} (\psi(b) - \psi(a))^{(k+1)\alpha} \| \xi - \xi \|_0, \quad \forall t \in I \end{aligned} \quad (2.16)$$

Do đó, sử dụng phương pháp quy nạp, ta kết luận bất đẳng thức (2.11) đúng với mọi  $m \geq 0$ .

Ngoài ra, nếu ta đặt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda + M)^m}{\Gamma(1+m\alpha)} (\psi(b) - \psi(a))^{m\alpha},$$

thì theo định nghĩa của hàm Mittag-Leffler và (2.11), ta thu được

$$\| \mathbf{U}^m \xi - \mathbf{U}^m \xi \|_0 \leq E_\alpha \left( (\lambda + M) (\psi(b) - \psi(a))^\alpha \right) \| \xi - \xi \|_0.$$

Chúng ta thấy tất cả các điều kiện của Định lý 2.6 đều được thỏa mãn. Do đó, ta có thể kết luận toán tử  $\mathbf{U}$  có điểm cố định duy nhất là  $\xi^*$ , nghĩa là bài toán (1.1) có duy nhất nghiệm  $\xi^*$ .

### 3. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân bậc phân thứ  $\Psi$ -Caputo bằng cách vận dụng các định lý điểm bất động Banach và Schauder dưới những điều kiện Lipschitz thích hợp. Kết quả đạt được không chỉ củng cố cơ sở lý thuyết cho các bài toán vi phân phân thứ mà còn mở ra hướng nghiên cứu ứng dụng trong các mô hình vật lý, kỹ thuật và sinh học có chứa thành phần nhớ.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Ricardo Almeida, A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 44 (2017), 460–481.
- [2] J. Vanterler da C. Sousa and E. Capelas de Oliveira, On the  $\Psi$ -Hilfer fractional derivative, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 60 (2018), 72–91.
- [3] J. Vanterler da C. Sousa and E. Capelas de Oliveira, A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of  $\Psi$ -Hilfer operator, Differential Equations & Applications 11 (2019), 87–106.



- 
- [4] D. B. Pachpatte, Properties of some  $\Psi$ -Hilfer fractional Fredholm-type integro-differential equations, *Advances in Operator Theory* 6 (2021), 1–14.
  - [5] Mohamed A. Khamsi và William A. Kirk, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, John Wiley & Sons, Inc. 2001.
  - [6] S.F. Lacroix, *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*. 2nd Edition, Mme, Paris, Ve Courcier, Tome Troisième, (1819) 409–410.
  - [7] Bertram Ross (1977). *Fractional Calculus*. *Mathematics Magazine*, 50(3), 115–122.
  - [8] Niels H. Abel, Solution de quelques problemes a l'aide d'integrales definies, *Oeuvres Completes*, Christiania (Grondahl) 1 (1881), 16–18.
  - [9] J. Liouville, Mémoiresurle théorémedes complémentaires, *J.Reine Angew. Math.*, 11 (1834) 1–19.
  - [10] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.